

MÔ HÌNH HÓA HÌNH HỌC NHỜ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

GEOMETRIC MODELING BY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Đặng Quang Á*

Ngày tòa soạn nhận được bài báo: 01/11/2021

Ngày nhận kết quả phản biện đánh giá: 04/05/2022

Ngày bài báo được duyệt đăng: 27/05/2022

Tóm tắt: Trong thiết kế hình học bằng máy tính việc sinh bề mặt của các vật thể là vô cùng quan trọng. Vì thế, các kỹ thuật sinh mặt nhanh và chính xác luôn là một nhu cầu cấp bách. Các phương pháp truyền thống sinh mặt thường dựa trên các thuật toán nội suy và có hạn chế về khả năng đảm bảo độ trơn toàn cục của bề mặt vật thể hoặc về khối lượng tính toán. Từ năm 1989 một kỹ thuật mới ra đời khắc phục được các nhược điểm trên. Đó là phương pháp sinh mặt bởi phương trình đạo hàm riêng (Partial Differential Equation) viết tắt là PDE. Bề mặt được sinh ra là nghiệm của PDE với các điều kiện biên nào đó. Trong hơn 30 năm qua phương pháp này đã phát triển rất mạnh mẽ cả về lý thuyết và ứng dụng. Ngày nay phương pháp PDE được sử dụng rộng rãi để mô hình hóa, thiết kế tương tác, nắn chỉnh hình dạng, phân tích và tối ưu thiết kế.

Bài viết này nhằm giới thiệu về ý tưởng của phương pháp thiết kế nhờ PDE qua một số thí dụ và sơ lược về sự phát triển cùng các ứng dụng của nó.

Từ khóa: Thiết kế nhờ máy tính, Mô hình hóa hình học, Sinh mặt, Phương trình đạo hàm riêng.

Abstract: In computer-aided geometric design, surface generation of objects is extremely important. Therefore, fast and accurate surface generation techniques are always an urgent need. Traditional surface generation methods are often based on interpolation algorithms and have limitations in their ability to guarantee the global smoothness of the object surface or the computational volume. Since 1989, a new technique has been born to overcome the above disadvantages. That is the method of surface generation by partial differential equation (PDE for short). The generated surface is a solution of PDE with certain boundary conditions. Over the past 30 years, this method has developed very strongly in both theory and application. Today, the PDE method is widely used for modeling, interaction design, shape morphing, analysis and design optimization.

This paper is intended to introduce the idea of PDE-driven design through some examples and a brief overview of its development and applications.

Keywords: computer-aided design, Geometric modeling, Surface generation, Partial Differential Equation.

* Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Mở Hà Nội

I. Mở đầu

Trong đồ họa máy tính (Computer Graphics), thiết kế hình học (Geometric Design) hoặc thiết kế nhờ máy tính (Computer-Aided Design) mô hình hóa hình học tức là biểu diễn toán học các đối tượng hình học để có thể dễ dàng thao tác lên chúng nhằm phục vụ cho mục đích thiết kế là một công việc vô cùng quan trọng. Các kỹ thuật sinh bề mặt (surface) đơn giản như biểu diễn hiển, biểu diễn ẩn, biểu diễn tham số tường minh bề mặt nói chung chỉ mô tả được các bề mặt đơn giản. Để biểu diễn các bề mặt phức tạp người ta phải sử dụng các kỹ thuật phức tạp hơn như các mặt lưới đa giác, mặt Bézier, nội suy B-splines và NURBS [2]. Các kỹ thuật nêu trên sử dụng số lượng lớn dữ liệu là các điểm nút trên bề mặt và các điểm điều khiển nên đòi hỏi khối lượng tính toán lớn. Ngoài ra, chúng có hạn chế về khả năng đảm bảo độ trơn toàn cục của bề mặt vật thể. Điều này đã được nói đến trong bài tổng quan [2]. Nhằm khắc phục các nhược điểm trên, từ năm 1989 một kỹ thuật mới đã ra đời. Đó là phương pháp sinh mặt bởi phương trình đạo hàm riêng (Partial Differential Equation), mà ta sẽ gọi tắt là phương pháp PDE và các bề mặt được sinh ra là mặt PDE. Kỹ thuật này lần đầu tiên được Bloor và Wilson công bố trong [3]. Bề mặt được sinh ra là nghiệm của PDE với các điều kiện biên nào đó, chính xác hơn là các đường cong thiết diện biên. Trong hơn 30 năm qua phương pháp này đã phát triển rất mạnh mẽ cả về lý thuyết và ứng dụng. Ngày nay phương pháp PDE được sử dụng rộng rãi để mô hình hóa, thiết kế tương tác, nắn chỉnh hình dạng, phân tích và tối ưu thiết kế, thực tế ảo,...

Bài viết này nhằm giới thiệu về ý tưởng của phương pháp thiết kế nhờ PDE qua một số thí dụ và sơ lược về sự phát triển cùng các ứng dụng của nó.

Để dễ theo dõi, dưới đây chúng tôi nhắc lại một số khái niệm.

Đường cong trong mặt phẳng xOy là tập hợp các điểm có tọa độ (x, y) được cho bởi một trong các dạng sau:

- Dạng tường minh $y=f(x)$
- Dạng ẩn $f(x,y)=0$
- Dạng tham số $x=x(t), y=y(t)$, trong đó t là tham số.

Mặt (hay bề mặt) trong không gian ba chiều (3D) là tập hợp các điểm có tọa độ (x,y,z) được cho bởi một trong các dạng sau:

- Dạng tường minh $z=f(x,y)$
- Dạng ẩn $f(x,y,z)=0$.
- Dạng tham số $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$ trong đó u,v là các tham số.

Phương trình đạo hàm riêng (PDE) là phương trình chứa ẩn hàm và các đạo hàm riêng của nó. Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình được gọi là cấp của phương trình.

Bài toán tìm nghiệm của PDE thỏa mãn các điều kiện biên tức là các điều kiện đặt lên ẩn hàm tại các biên của miền xác định của bài toán được gọi là bài toán biên.

Lĩnh vực mô hình hóa hình học chủ yếu làm việc với đường cong, mặt cong tham số và các phương trình PDE hai biến số loại elliptic.

II. Mô hình hóa các mặt cong đơn giản

Ý tưởng của phương pháp PDE trong thiết kế hình học là sinh các mặt

cong như là nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng trong miền tham số thỏa mãn các điều kiện biên. Miền tham số chuẩn được xét là

$$\Omega = \{(u, v), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$

Dưới đây là các thí dụ minh họa ý tưởng của phương pháp PDE khi sử dụng phương trình các cấp khác nhau.

2.1 Mô hình hóa mặt cong nhờ PDE cấp hai

Trong công trình đầu tay [3] Bloor và Wilson đã xây dựng mặt cong nhờ phương trình Laplace. Cụ thể là các tác giả đã tạo ra mặt cong tham số

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

như là nghiệm của phương trình

$$\Delta_a X(u, v) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0 \quad (1)$$

trong miền Ω thỏa mãn các điều kiện biên tuần hoàn theo v và

$$\begin{cases} x(0, v) = \cos v, y(0, v) = \sin v, \\ z(0, v) = H; x(1, v) = R \cos v, \\ y(1, v) = R \sin v; z(1, v) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó a, R, H là các số dương.

Chú ý rằng nghiệm của phương trình (1) tuần hoàn theo v có dạng chuỗi Fourier

$$X(u, v) = A_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(u) \cos nv + B_n(u) \sin nv), \quad (3)$$

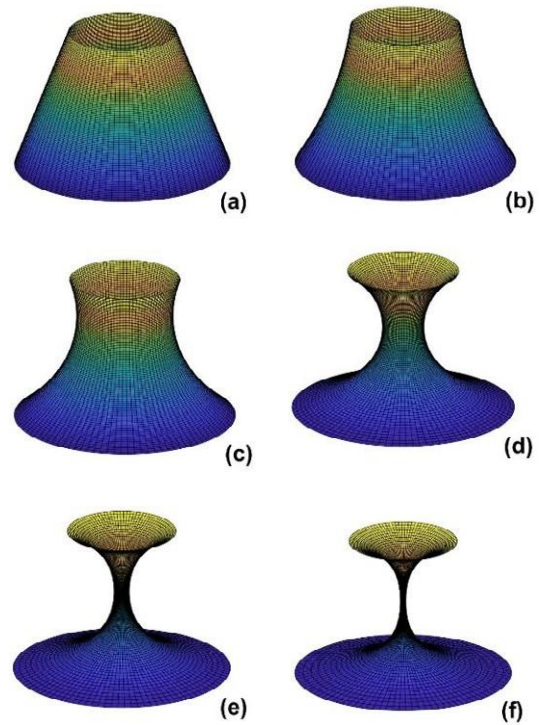
trong đó $A_0, A_n, B_n, n=1, 2, \dots$ là các véc tơ hàm được tính theo các công thức

$$\begin{aligned} A_0(u) &= a_{00} + a_{01}u, \\ A_n(u) &= a_{n1}e^{nau} + a_{n2}e^{-nau}, \\ B_n(u) &= b_{n1}e^{nau} + b_{n2}e^{-nau}. \end{aligned}$$

Từ các điều kiện biên (2) dễ dàng tìm được các hệ số trong biểu diễn nghiệm (3). Nghiệm này có dạng

$$\begin{aligned} x &= \left(\cosh au + \frac{R - \cosh a}{\sinh a} \sinh au \right) \cos v, \\ y &= \left(\cosh au + \frac{R - \cosh a}{\sinh a} \sinh au \right) \sin v, \quad (4) \\ z &= H(1 - u). \end{aligned}$$

Các mặt sinh bởi nghiệm trên $R=2, H=3$ với $a=0.005, 1, 2, 4, 6, 8$ và một số giá trị khác nhau của tham số được cho trong Hình 1 (a, b, c, d, e f).



Hình 1. Các mặt sinh bởi phương trình cấp hai (1) và các điều kiện biên (2).

2.2. Mô hình hóa mặt cong nhờ PDE cấp bốn

Xét phương trình cấp bốn [4]

$$\Delta_a \Delta_a X(u, v) = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

trong miền Ω thỏa mãn các điều kiện biên tuần hoàn theo v và

$$\begin{cases} X(0, v) = G_1(v), X(1, v) = G_2(v) \\ X_u(0, v) = G_3(v), X_u(1, v) = G_4(v) \end{cases} \quad (6)$$

trong đó ký hiệu $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$, $G_i(v)$ ($i=1, 2, 3, 4$) là các véc tơ hàm. Nghiệm

tổng quát của phương trình (5) có dạng (3), trong đó

$$\begin{aligned} A_0(u) &= a_{00} + a_{01}u + a_{02}u^2 + a_{03}u^3, \\ A_n(u) &= a_{n1}e^{nau} + a_{n2}e^{-nau} + a_{n3}ue^{nau} + a_{n4}ue^{-nau}, \\ B_n(u) &= b_{n1}e^{nau} + b_{n2}e^{-nau} + b_{n3}ue^{nau} + b_{n4}ue^{-nau}. \end{aligned}$$

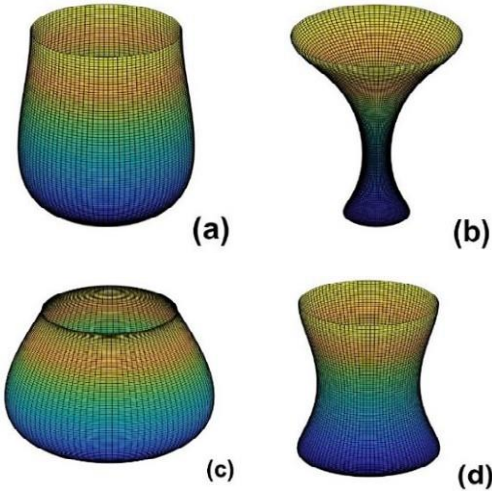
Từ các điều kiện biên (6) có thể xác định được các hệ số $A_0, A_n, B_n, n=1, 2, \dots$

Thí dụ: Với các điều kiện biên (xem [4])

$$\begin{aligned} x(0, v) &= R_{top} \cos v, y(0, v) = R_{top} \sin v, \\ z(0, v) &= H; x(1, v) = 0, \\ y(1, v) &= 0, z(1, v) = 0 \\ x_u(0, v) &= 0, y_u(0, v) = 0, z_u(0, v) = 0, \\ x_u(1, v) &= S_{bot} \cos v, y_u(1, v) = S_{bot} \sin v, \\ z_u(1, v) &= 0 \end{aligned}$$

nghiệm của PDE sinh ra các bề mặt trong Hình 2 với các bộ tham số trong bảng sau:

Hình	a	H	R_{top}	S_{bot}	S_{bot}
(a)	1	2	1	-2.5	-5.5
(b)	8	3	0.6	-2.8	-5
(c)	0.5	3	0.6	-1	-5
(d)	5	3	0.1	-3.6	-1.3



Hình 2. Các bề mặt sinh bởi phương trình cấp bốn

2.3. Mặt cong nhờ sinh bởi hỗn hợp phương trình cấp hai và bốn

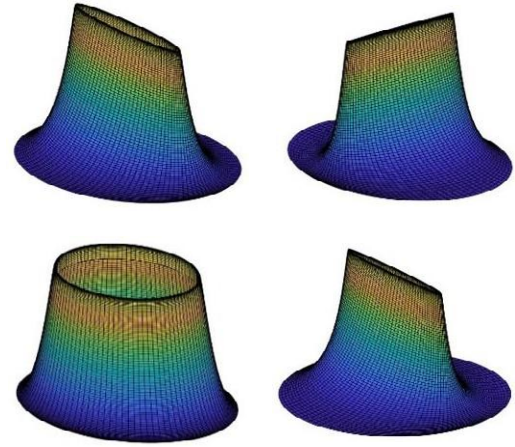
Có thể sử dụng hỗn hợp các phương trình cấp hai và cấp bốn để sinh

các bề mặt. Thí dụ, sử dụng các phương trình [3]

$$\begin{aligned} \Delta_a x(u, v) &= 0, \Delta_a y(u, v) = 0, \\ \Delta_b \Delta_b z(u, v) &= 0, \end{aligned}$$

trong đó Δ_a là toán tử được định nghĩa bởi công thức (1). Ở đây, x, y thỏa mãn phương trình cấp hai, còn thỏa mãn phương trình cấp bốn.

Với một số điều kiện biên cho trước nghiệm của các phương trình trên sinh ra các bề mặt trong Hình 3.



Hình 3. Các bề mặt sinh bởi các phương trình cấp hỗn hợp

2.4. Mô hình hóa mặt cong nhờ PDE cấp bốn tổng quát

Các mặt cong phức tạp có thể được thiết kế nhờ các phương trình cấp bốn tổng quát hơn phương trình song điều hòa (5). Cụ thể, người ta sử dụng phương trình cấp bốn với các véc tơ tham số điều khiển [5] sau đây

$$\left(B \frac{\partial^4}{\partial u^4} + C \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2} + D \frac{\partial^4}{\partial v^4} \right) X(u, v) = 0 \quad (7)$$

trong đó

$$B = (b_x, b_y, b_z)',$$

$$C = (c_x, c_y, c_z)',$$

$$D = (d_x, d_y, d_z)'$$

là các véc tơ tham số hình dạng. Các điều kiện biên cũng như (6). Nghiệm của phương trình (7) có thể biểu diễn trong dạng

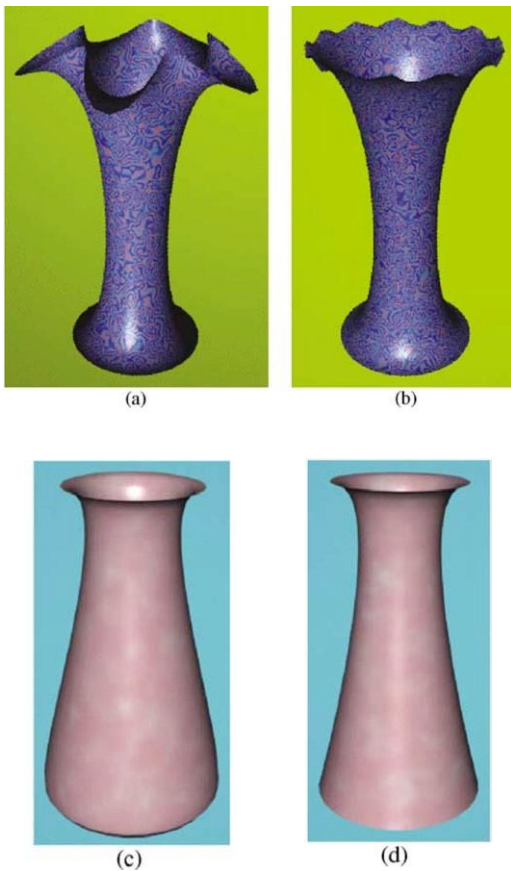
$$X(u, v) = A_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(u)f_n(v)),$$

trong đó

$$A_0(u) = a_{00} + a_{01}u + a_{02}u^2 + a_{03}u^3, \\ A_n(u) = (A_{n1} + A_{n2}u)e^{t_{n1}u} + (A_{n3} + A_{n4}u)e^{t_{n2}u}.$$

Các giá trị t_{n1} , t_{n2} xác định qua các tham số của phương trình (7).

Lựa chọn các tham số hình dạng và các điều kiện biên khác nhau có thể tạo ra được các lọ hoa hình dáng khác nhau. Xem Hình 4 [5].



Hình 4. Các lọ hoa được sinh bởi PDE cấp bốn (7)

2.5. Mô hình hóa mặt cong nhờ PDE cấp sáu

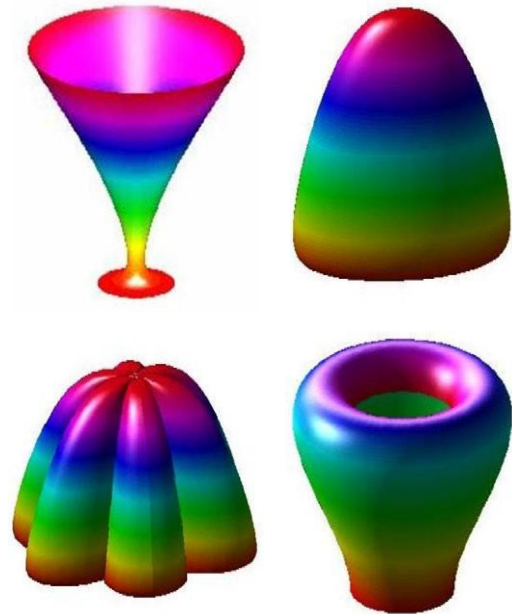
Để sinh các mặt cong có sự liên tục về độ cong (curvature) người ta phải sử dụng phương trình PDE cấp sáu trong khi để có sự liên tục về tiếp tuyến chỉ cần phương trình cấp bốn. Trong [6], [7] phương trình được sử dụng có dạng

$$\left(A \frac{\partial^6}{\partial u^6} + B \frac{\partial^6}{\partial u^4 \partial v^2} + C \frac{\partial^6}{\partial u^2 \partial v^4} + D \frac{\partial^6}{\partial v^6} \right) X(u, v) = 0 \quad (8)$$

trong đó A, B, C, D là các véc tơ tham số hình dạng. Một trường hợp riêng của phương trình trên là phương trình tam điều hòa

$$\Delta_a^3 X(u, v) = 0.$$

Các thí dụ về bề mặt tam điều hòa được sinh bởi phương trình trên và một số điều kiện biên khác nhau cho trong [8], Hình 5.



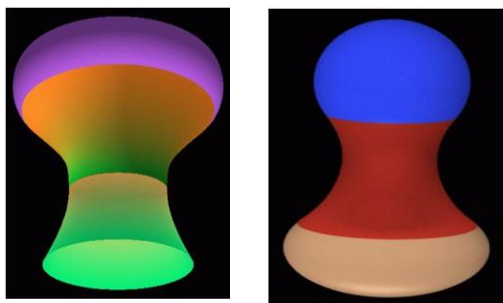
Hình 5. Các bề mặt tam điều hòa

Một trường hợp cụ thể của phương trình (8) khi

$$a_x = a_y = a_z = b_x = b_y = b_z = 1$$

$$c_x = c_y = c_z = d_x = d_y = d_z = -1$$

với các điều kiện biên đặc biệt sinh ra mặt cấp sáu như trong Hình 6 (xem [7]).



Hình 6. Các mặt sinh bởi PDE cấp sáu

2.6. Một số nhận xét

- Trong các tiểu mục ở trên về sinh các mặt cong nhờ các PDE cấp hai, bốn và sáu, lời giải tổng quát của các phương trình thường được biểu diễn qua chuỗi Fourier. Các điều kiện biên trong các thí dụ minh họa thường khá đơn giản. Chúng chỉ chứa một số hạng của chuỗi Fourier nên nghiệm của các phương trình dễ tìm được. Trong trường hợp tổng quát, các điều kiện biên cũng khai triển thành chuỗi Fourier và người ta chỉ giữ lại hữu hạn các số hạng như là xấp xỉ của điều kiện biên. Khi đó nghiệm của bài toán cũng tìm trong dạng tổng hữu hạn của các thành phần Fourier. Tất nhiên việc tìm các hệ số trong biểu diễn này khá phức tạp.

+ Khi các điều kiện biên không cho trong dạng các biểu thức giải tích mà cho giá trị tại các tập điểm rời rạc thì bước đầu phải xây dựng các đường cong nội suy tại các tập điểm đó rồi xấp xỉ hàm tìm được bởi tổng Fourier.

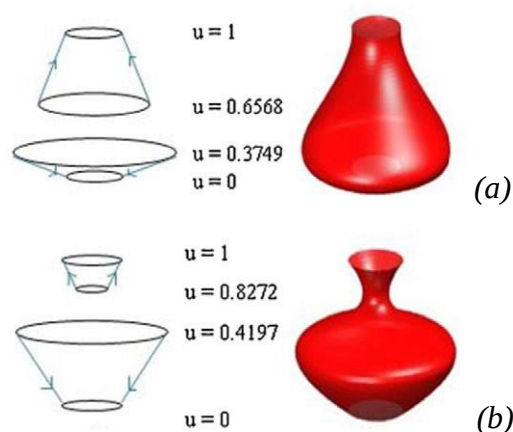
+ Ngoài phương pháp Fourier để giải các bài toán biên cho PDE đã được nói tới ở trên thì các phương pháp số như phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn cũng được sử dụng [9].

III. Mô hình hóa các bề mặt phức tạp

Để ý rằng các bề mặt được giới thiệu trong mục 3 là nghiệm của PDE với

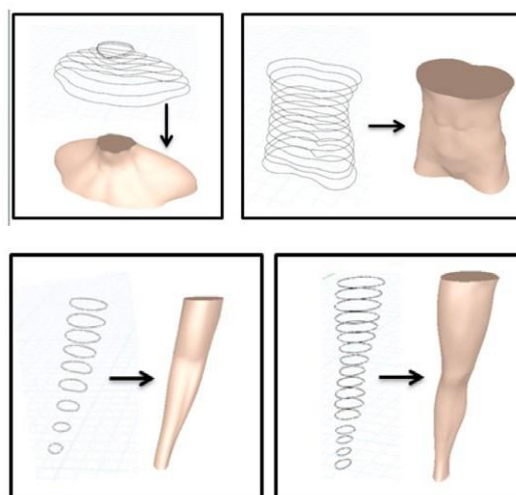
các điều kiện biên cho tại $u=0$ và $u=1$. Nói chung chúng là đơn giản. Để mô hình hóa các vật thể ba chiều (3D) với các bề mặt phức tạp người ta phải pha trộn (blend) hay phải ghép nhiều mảnh sinh bởi PDE. Dưới đây là một số thí dụ.

Thí dụ 1: Các bề mặt trong Hình 7, mỗi bề mặt là mảnh ghép của 3 mảnh sinh bởi 3 cặp các điều kiện biên [10]:



Hình 7. Các bề mặt sinh bởi 3 mảnh

Thí dụ 2: Bề mặt được ghép bởi nhiều mảnh sinh bởi các đường cong thiết diện biểu diễn một số bộ phận cơ thể người trong Hình 8 [11]. Ở đó, người ta sử dụng phương trình cấp sáu rút gọn

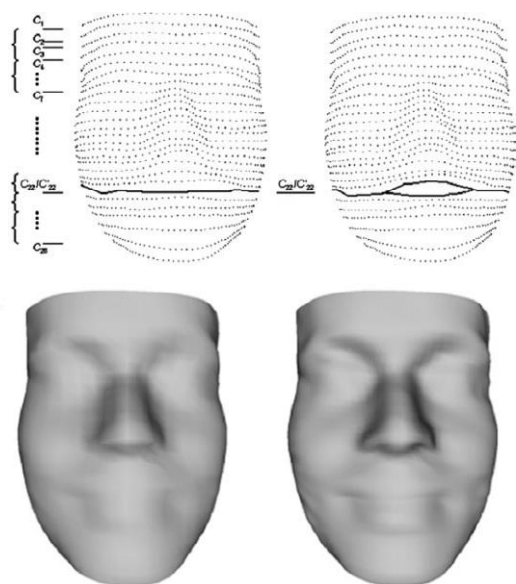


Hình 8. Bề mặt được ghép từ nhiều mảnh

Thí dụ 3. Mô hình hóa khuôn mặt người.

Trong [12] từ 29 đường cong trên khuôn mặt với miệng khép hoặc mở các tác giả đã xây dựng được khuôn mặt với miệng khép hoặc mở nhờ phương trình song điều hòa với nhiều tham số điều khiển trong các điều kiện biên. Xem Hình 9.

Mới đây, trong [13] Fu và các cộng sự đã phát triển thuật toán xây dựng khuôn mặt từ các mảnh ghép sử dụng phương trình PDE cấp hai kết hợp với nội suy.



Hình 9. Khuôn mặt được tạo ra từ 29 đường cong

IV. Một số ứng dụng của phương pháp PDE

Nhu cầu ngày càng tăng của các ứng dụng thời gian thực trong thiết kế hình học với sự trợ giúp của máy tính (CAD) đã dẫn đến sự phát triển không ngừng của các kỹ thuật tạo bề mặt hiệu quả. Các bề mặt PDE đã được chứng minh là một công cụ rất mạnh trong các nhiệm vụ như vậy, và do tính linh hoạt của loại bề mặt này mà nhiều kỹ thuật đã được phát triển. Một số các lĩnh vực ứng dụng chính của phương pháp tạo bề mặt PDE là:

- Thiết kế tương tác: Các hệ thống CAD sử dụng công cụ thiết kế tương tác

dựa trên PDE, ở đó việc điều khiển chính các bề mặt được thực hiện thông qua các điều kiện biên. Người dùng không cần các hiểu biết chi tiết liên quan đến PDE mà chỉ cần xác định các điều kiện biên bởi các đường cong biên (xem [14], [15]).

- Kết hợp hình dạng (shape blending): đây là quá trình ghép nối hai hoặc nhiều mảnh bề mặt sao cho độ trơn được đảm bảo tại các vị trí ghép nối. PDE chính là giải pháp tự nhiên để giải quyết vấn đề này. Mức độ trơn được xác định bởi cấp của phương trình PDE. Xem [7], [11], [16-18].

- Phân tích và tối ưu thiết kế: Các bề mặt PDE cung cấp một môi trường tự nhiên cho phát triển các công cụ có khả năng phân tích thiết kế và tối ưu hóa dựa trên tính chất vật lý vốn có của các bài toán cụ thể. Quá trình tối ưu hóa hình dạng của đối tượng liên quan đến việc thiết lập một hàm mục tiêu phụ thuộc các tham số thiết kế. Một số thí dụ có thể xem trong [19-22].

- Nắn chỉnh hình dạng (shape morphing): là sự biến đổi trơn tru giữa hai hình dạng khác nhau của một đối tượng. Các phương pháp tạo bề mặt có thể là một công cụ hữu ích để giải quyết vấn đề trên. Đặc biệt, phương pháp tạo bề mặt dựa trên PDE (phương pháp Bloor-Wilson) khi thay đổi điều kiện biên dễ dàng thay đổi bề mặt của đối tượng. Ba phương pháp luận nắn chỉnh hình dạng là thay đổi điều kiện biên, tăng số thành phần Fourier và kết hợp hai phương pháp trên được đề xuất trong công trình có tính chất mở đầu [23]. Sự phát triển tiếp theo của các kỹ thuật nắn chỉnh hình dạng được trình bày trong [24], [25].

- Hoạt hình (Animation): Hoạt hình là một lĩnh vực mà các bề mặt PDE tìm thấy các ứng dụng hữu ích. Các quá trình như nắn chỉnh hình dạng, thay đổi biểu cảm khuôn mặt và chuyển động là các quá trình có thể được tạo ra từ việc sử dụng phương pháp PDE. Khi cho các tham số của phương trình và các điều kiện biên là các hàm phụ thuộc thời gian theo các quy luật nhất định có tính chất vật lý người ta thu được chuyển động của các đối tượng mà bề mặt của chúng được sinh bởi các PDE. Nhiều thí dụ về hoạt hình có thể xem trong [25-28].

- Về một số ứng dụng khác của phương pháp tạo bề mặt PDE có thể xem trong các bài tổng quan [2], [29].

V. Kết luận

Bài viết đã giới thiệu sơ lược về phương pháp mô hình hóa bề mặt dựa trên PDE. Đây là một phương pháp mới rất hiệu quả trong thiết kế bề mặt của các vật thể trong kỹ thuật cũng như trong đời sống. Ý tưởng của phương pháp là các bề mặt trơn được tạo ra như là lời giải của PDE với các điều kiện biên khác nhau. Cấp của PDE xác định độ trơn của bề mặt. Với cách tiếp cận này việc xây dựng các bề mặt dẫn đến việc giải các bài toán biên của PDE bằng các phương pháp giải tích mà chủ yếu là phương pháp Fourier và các phương pháp số như phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn. Do việc thao tác lên các bề mặt thông qua một số ít các tham số trong phương trình và điều kiện biên nên phương pháp PDE sinh các bề mặt ngày càng được ứng dụng nhiều trong thiết kế hình học và đồ họa máy tính. Mới đây, nhằm phát huy hơn nữa ưu thế của phương pháp PDE người ta đã kết hợp

nó với NURBS- một kỹ thuật phổ biến và đã trở thành chuẩn công nghiệp để thiết kế tối ưu các đối tượng phức tạp, chẳng hạn như đầu tàu cao tốc [30].

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Farin G (2001), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, a Practical Guide*, 5th edn. Morgan Kaufmann, San Diego.
- [2]. Castro GG, Ugail H et al. (2008), A survey of partial differential equations in geometric design, *Visual Comput* 24: 213–225
- [3]. Bloor MIG, Wilson MJ (1989) Generating blend surfaces using partial differential equations. *Comput Aided Design* 21(3):33–39
- [4]. Lowe TW, Bloor MIG and Wilson MJ (1990), Functionality in blend design, *Comput Aided Design*, 22(10):655-665
- [5]. Zhang JJ, You L. (2002), PDE based surface representation-vase design *Comput & Graphics*, 26: 89-98.
- [6]. Zhang J, You L (2004), Fast surface modelling using a 6th order PDE. *Comput. Graphics Forum* 23(3), 311–320.
- [7]. Zhang, JJ, You L (2006), Blending Surface Modelling Using Sixth Order PDEs *Inter. Journal of CAD/CAM*, 6(1) 157-166.
- [8]. Ishak SN, Ali JM (2009), Parametric Geometric Surface Generation using Tri-Harmonic PDE *European Journal of Scientific Research*, 38(3): 380-385.
- [9]. Ugail H (2011), *Partial Differential Equations for Geometric Design*, Springer.
- [10]. Ahmat N, Ugail H, Castro GG (2011), Method of modelling the compaction behaviour of cylindrical pharmaceutical tablets, *International Journal of Pharmaceutics*, 405: 113–121.
- [11]. Fu H et al. (2022), 3D Modelling with C2 Continuous PDE Surface Patches, *Mathematica*, 9, 2905

- [12]. Sheng Y, Willis P, Castro GG, Ugail H (2011), Facial geometry parameterisation based on Partial Differential Equations, *Mathematical and Computer Modelling* 54: 1536-1548.
- [13]. Fu H et al. (2021), PDE Surface-Represented Facial Blendshapes, *Mathematica*, 10, 319.
- [14]. Kubiesa S, Ugail H, Wilson MJ (2004), Interactive design using higher order PDEs. *Visual Comput.* 20, 682–693
- [15]. Ugail H, Bloor MIG and Wilson MI (1999), Techniques for Interactive Design Using the PDE Method, *ACM Transactions on Graphics*, 18(2): 195–212
- [16]. Chen C, Sheng Y, Li F, Zhang G and Ugail H (2017), A PDE-based head visualization method with CT data, *Computer Animation And Virtual Worlds*, 28 e1683
- [17]. You L, Yang X, Pan J, Lee T-Y, Bian S, Qian K, Habib Z, Sargano AB, Kazmi I, Zhang JJ (2020) Fast character modeling with sketch-based PDE surfaces. *Multimed. Tools Appl.* 79:23161–23187
- [18]. You L, Comninou P, Zhang JJ (2004), PDE blending surfaces with C2 continuity. *Comput. Graph.* 28(6):895–906
- [19]. Ugail H, Wilson MJ (2003), Efficient shape parametrisation for automatic design optimisation using a partial differential equation formulation. *Comput. Struct.* 81(29), 2601–2609
- [20]. Ahmat N, Castro GG, Ugail H (2014), Automatic shape optimisation of pharmaceutical tablets using Partial Differential Equations, *Computers & Structures*, 130:1-9
- [21]. Huband J, Li W (2001), Extracting design parameters from airplane wing data by using Bloor–Wilson PDE surface model. *Math. Eng. Ind.* 8, 239–252
- [22]. Dekanski CW, Bloor MIG, Wilson M.J (1995), The representation of marine propeller blades using the PDE method. *J. Ship Res.* 38(2), 108–116
- [23]. Castro GG, Ugail H, Willis P, and Palmer I (2006), Visualization, *Imaging and Image Processing*. ACTA Press, 2006, ch. Shape Morphing Using PDE Surfaces, 553–558
- [24]. Castro GG and Ugail H (2007), Shape Morphing of Complex Geometries Using Partial Differential Equations, *Journal of Multimedia*, 6(2): 15-25.
- [25]. Wang S, Xiang N, Xia Y, You L, Zhang J (2021), Real-time surface manipulation with C1 continuity through simple and efficient physics-based deformations, *The Visual Computer* 37:2741–2753
- [26]. E. Chaudhry et al. (2019), Modelling and Simulation of Lily flowers using PDE Surfaces, *2019 13th International Conference on Software, Knowledge, Information Management and Applications (SKIMA)*, pp. 1-8
- [27]. Sheng Y, Willis P, Castro G, Ugail H (2009) PDE-based facial animation: making the complex simple, In: *Advances in visual computing*, part II. Lecture notes in computer science (LNCS), vol 5359. Springer, Berlin, pp 723–732
- [28]. Castro GG, Athanasopoulos M, Ugail H (2010), Cyclic animation using partial differential equations, *Vis Comput* 26: 325–338
- [29]. You LH, Jin X, You XY, Zhang J J (2013), Surface Modeling Using Partial Differential Equations: A Survey, *17th Inter Conference on Information Visualisation*, London
- [30]. Wang S, Xia Y, Wang R et al. (2019), Optimal NURBS conversion of PDE surface-represented high-speed train heads. *Optimization and Engineering* 20, 907–928

Địa chỉ tác giả: Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Mở Hà Nội.

Email: dquanga@gmail.com

